



Sigma
MC

APRIL

G.Y. NIEUWLAND

OMLOOPSGETAL, NULPUNTEN, VERTAKKINGEN

VOORDRACHT IN DE SERIE "ELEMENTAIRE ONDERWERPEN"

VANUIT HOGER STANDPUNT BELICHT"

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Serie Elementaire onderwerpen, 28-4-1971

Omloopsgetal, nulpunten, vertakkingen

door: prof.dr. G.Y. Nieuwland (V.U.A.)

Syllabus

1. Zij X de verzameling van functies $f: \mathbb{C} \supset D \ni z \rightarrow f(z) \in \mathbb{C}$, $D = \{z: |z| < 1\}$, f continu op $\bar{D}$, holomorf op D . X is een genormeerde ruimte met $\|f\| = \sup_{|z|=1} |f(z)|$. Zij $F = f(\partial D)$.

Stelling 1. Voor iedere $f \in X$ en $w_0 \notin F$, is een functie

$$d(f, D, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{dw}{w - w_0}$$

gedefinieerd.

- 1) d een geheel waardig, en constant op elke component van CF ;
- 2) d is een continue functie van f ;
- 3) d is gelijk aan het aantal nulpunten van $f - w_0$ binnen D , geteld volgens hun orde.

Opm. Meetkundig is d "het aantal malen dat F om w_0 heenloopt"; d heet het omloopsgetal.

Stelling 2 (Rouché). $f_0, f_1 \in X$. Zijn $d(f_0, D, 0)$ en $d(f_1, D, 0)$ gedefinieerd en geldt $\forall z$ zodat $|z| = 1$:

$$|f_0(z) - f_1(z)| < |f_0(z)|,$$

dan is $d(f_0, D, 0) = d(f_1, D, 0)$.

Gevolg. Zij f_t een continue afbeelding van $[0, 1] \times X \rightarrow X$ en zij $d(f_0, D, 0) \neq d(f_2, D, 0)$ (beide gedefinieerd), dan is er een $t \in [0, 1]$ zodat f_t een nulpunt op ∂D heeft.

2. Zij X de verzameling van functies $f: \mathbb{R}^n \supset D \ni x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^n$, D open begrensd, f continu op $\bar{D}$, X genormeerd door $\|f\| = \sup_{x \in \bar{D}} |f(x)|$.

Stelling 3 (Brouwer). Zij $F \in X$: $F(x) \neq 0$ voor $x \in \partial D$.

Er is een geheel getal $d(F, D, 0)$:

- 1) d hangt alleen af van de afbeelding van ∂D onder F .
- 2) d is constant op elke component van $\mathbb{R}^n - F(\partial D)$; $d = 0$ indien $\forall x \in \bar{D}: F(x) \neq 0$.
- 3) d is een continue functie van F .
- 4) Zij $H_t: X \times [0, 1] \rightarrow X$ continu, en $\forall t \in [0, 1]: H_t(\partial D) \neq 0$. Dan $d(H_0, D, 0) = d(H_1, D, 0)$.
- 5) Zijn $X \ni F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X' \ni F': D' \rightarrow \mathbb{R}^m$, en $d(F, D, 0)$ en $d'(F', D', 0)$ gedefinieerd. Dan is voor $X \times X' \ni (F, F'): D \times D' \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$:

$$d((F, F'), D \times D', 0) = d(F, D, 0) \cdot d'(F', D', 0).$$

- 6) Zij $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ kanoniek ingebed. $F: \mathbb{R}^m \supset \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ continu, $I + f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ met I de identieke afbeelding $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Indien $0 \notin (I + F)(\partial D)$: $d(I + F, D, 0) = d(I + F|_{\bar{D} \cap \mathbb{R}^m}, D \cap \mathbb{R}^m, 0)$.

Opm. Zij $F \in C^1(\bar{D})$, zodanig dat $J_F(x) = \det(\partial F / \partial x_i) \neq 0$ indien $F(x) = 0$. Dan

$$d(F, D, 0) = \sum_{\{x: F(x)=0\}} \text{sign } J_F(x).$$

3. Zij X de verzameling van compacte afbeeldingen van een reële Banachruimte in zichzelf, met de norm-topologie. $\{B_n\}$ de verzameling eindigdimensionale deelruimten van B . Zij $D \subset B$ open en begrensd, zodanig dat elke $D \cap B_n$ een begrensde open deelverzameling van B_n is.

Stelling 4 (Leray-Schauder). Zij $F \in X$, en $0 \notin (I + F)(\partial D)$. Dan is de afbeeldingsgraad $d(I + F, D, 0)$ gedefinieerd:

- 1) d is een geheelwaardige, continue functie van F .
- 2) d hangt alleen af van de afbeelding $(I + F)(\partial D)$.
- 3) Zij $H_t: X \times [0, 1] \rightarrow X$ compact, en $\forall t \in [0, 1]: H_t(\partial D) \neq 0$. Dan is $d(H_0, D, 0) = d(H_1, D, 0)$.
- 4) Zij $B = B_1 + B_2$, $F_1: F|_{B_1}$, $F_2: F|_{B_2}$, dan $d(I + F, D, 0) = d_1(I + F_1, D \cap B_1, 0) \cdot d_2(I + F_2, D \cap B_2, 0)$.

Stelling 5. Zij $F \in X$ lineair, -1 geen eigenwaarde van F , en $0 \in D$. Dan is $d(I+F, D, 0) = (-1)^{\sum m_i}$, met m_i de dimensie van de eigenruimte van F , behorend bij de reële eigenwaarden $\lambda_i < -1$.

4. Zij F_λ voor vaste, reële λ , een niet-lineaire continue afbeelding van een reële Banach-ruimte in zichzelf. Laat de operator vergelijking $F_\lambda(u) = 0$ twee verschillende oplossingen $u_0(\lambda)$ en $u_1(\lambda)$ hebben, zodat voor $\lambda \rightarrow \lambda_1$, $u_1(\lambda) \rightarrow u_0(\lambda_1)$.

Def. λ_0 heet vertakkingspunt van $F_\lambda(u) = 0$ t.o.v. de oplossing $u_0(\lambda)$.

Zij F_λ een niet-lineaire operator van een genormeerde ruimte $X \rightarrow X$, en G_λ een lineaire operator: $X \rightarrow X$, zodat $F_\lambda(u_0 + u) = F_\lambda(u_0) + G_\lambda(u) + O(\|u\|)$.

Def. G_λ heet de Fréchet-afgeleide van F_λ in het punt $u_0 \in X$.

Zij X een reële Banach-ruimte. F_λ een niet-lineaire afbeelding van $X \rightarrow X$, van de vorm $F_\lambda(u) \stackrel{\text{def}}{=} I - \lambda F(u) \stackrel{\text{def}}{=} (I - \lambda(G+H))(u)$, G : Fréchet-afgeleide van F in het punt $u = 0$, F compact: $X \rightarrow X$, $\|H(u)\| = O(\|u\|^2)$.

Stelling 6. Vertakkingspunten van $F_\lambda(u) = 0$ komen alleen voor bij eigenwaarden van de lineaire operator G .

Stelling 7. Zij $F_\lambda(u) = (I - \lambda(G+H))(u) = 0$, en λ_0 eigenwaarde van G met oneven multipliciteit. Dan is λ_0 vertakkingspunt van $F_\lambda(u) = 0$ t.o.v. $u \equiv 0$.

5. Een toepassing van stelling 7 in het Taylor-probleem uit de theorie der visceuze stromingen wordt gegeven in lit. 4.

6. Literatuur

1. J.T. Schwarz Nonlinear functional analysis. Lecture notes
1963-64, Courant Institute NYU. (1965).
2. M.A. Krasnoselski Topological methods in the theory of nonlinear
integral equations. New York (1964).
3. J.B. Keller, Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue
S. Antman (eds.) problems. New York (1969).
4. W. Velte Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen
der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylor-
Problem. Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 22, 1966,
pp. 1-14.